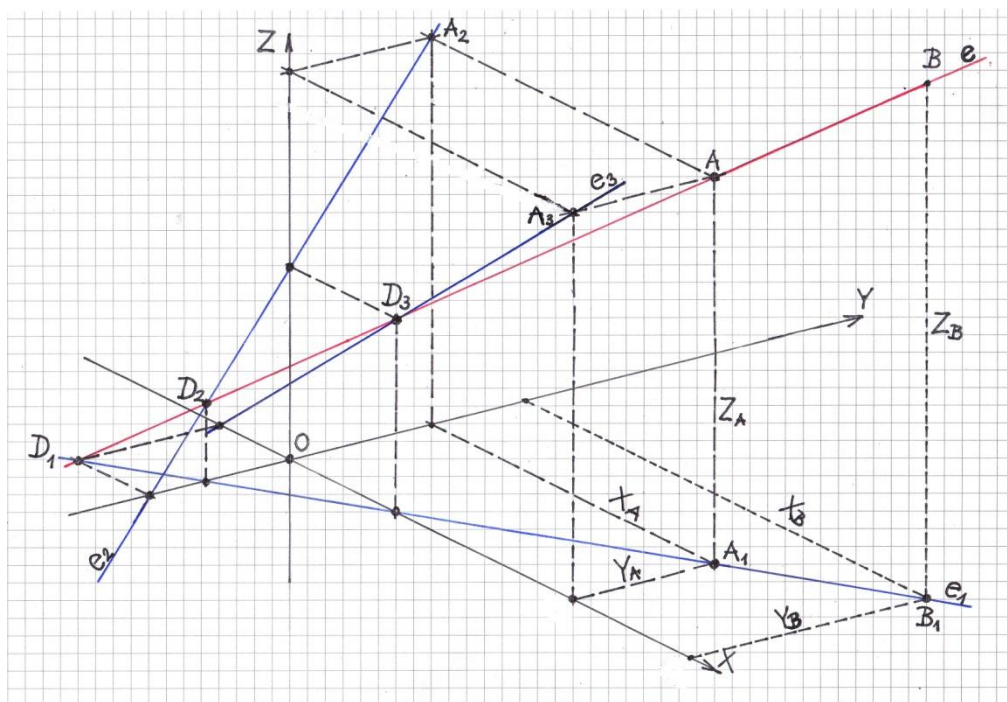


## Egy térbeli egyenes és a koordinátasíkok dőléspontjainak meghatározása

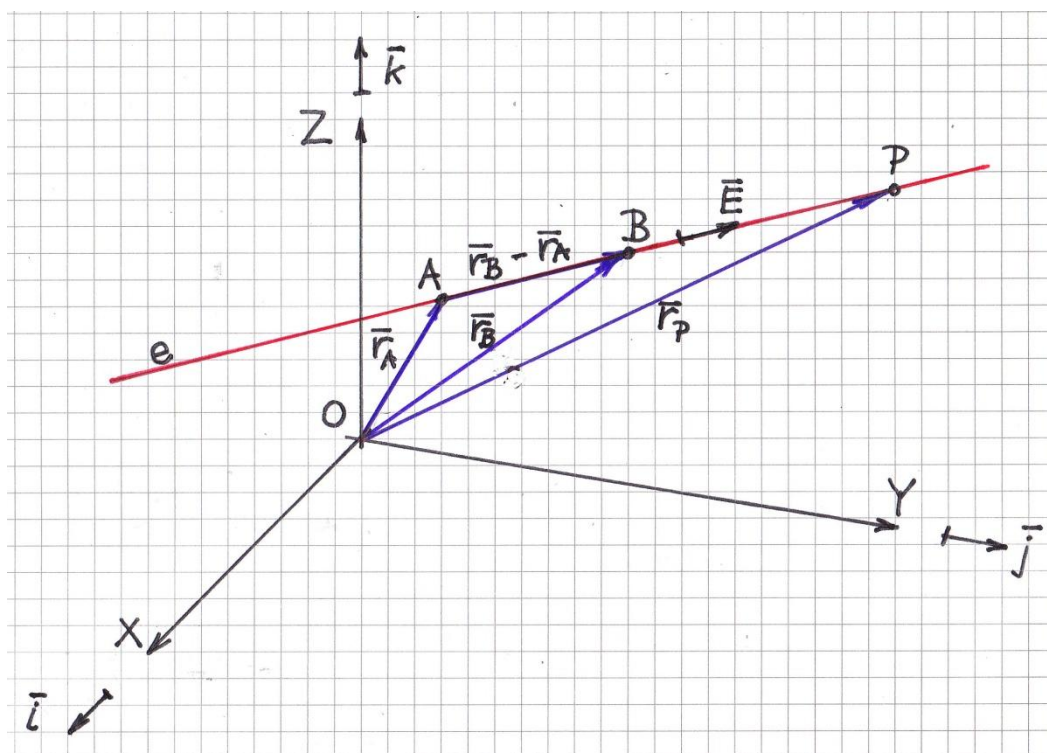
Adott: a térbeli  $e$  egyenes az  $A$  és  $B$  pontjaival – 1. ábra.

**Keresett:** a  $D_1, D_2, D_3$  dőfésponatok derékszögű koordinátái.



1. ábra

A vektoralgebrai megoldáshoz tekintsük a 2. ábrát is!



2. ábra

Az  $e$  egyenes egy tetszőleges  $P$  pontjának helyvektora:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + t_P \cdot \mathbf{E}. \quad (1)$$

Az  $e$  egyenes menti  $E$  egységvektor kifejezése:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A|}, \quad (2/1)$$

ahol

$$|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A| = l_{AB} \quad (2/2)$$

az  $A$  és  $B$  pontok egymástól mért távolsága.

Most (1) és (2) - vel:

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + t_P \cdot \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A}{l_{AB}}. \quad (3)$$

Majd az  $A$  és a  $B$  pontok helyvektora:

$$\mathbf{r}_A = X_A \cdot \mathbf{i} + Y_A \cdot \mathbf{j} + Z_A \cdot \mathbf{k}, \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_B = X_B \cdot \mathbf{i} + Y_B \cdot \mathbf{j} + Z_B \cdot \mathbf{k}. \quad (5)$$

Ezután (3) - hoz, (4) és (5) - tel:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A &= (X_B \cdot \mathbf{i} + Y_B \cdot \mathbf{j} + Z_B \cdot \mathbf{k}) - (X_A \cdot \mathbf{i} + Y_A \cdot \mathbf{j} + Z_A \cdot \mathbf{k}) = \\ &= (X_B - X_A) \cdot \mathbf{i} + (Y_B - Y_A) \cdot \mathbf{j} + (Z_B - Z_A) \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (6)$$

Most (2/2) - vel:

$$l_{AB} = |\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A| = \sqrt{(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)^2} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}. \quad (7)$$

Majd (3), (4) és (6) szerint:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_P &= X_A \cdot \mathbf{i} + Y_A \cdot \mathbf{j} + Z_A \cdot \mathbf{k} + t_P \cdot \frac{(X_B - X_A) \cdot \mathbf{i} + (Y_B - Y_A) \cdot \mathbf{j} + (Z_B - Z_A) \cdot \mathbf{k}}{l_{AB}} = \\ &= \left( X_A + t_P \cdot \frac{X_B - X_A}{l_{AB}} \right) \cdot \mathbf{i} + \left( Y_A + t_P \cdot \frac{Y_B - Y_A}{l_{AB}} \right) \cdot \mathbf{j} + \left( Z_A + t_P \cdot \frac{Z_B - Z_A}{l_{AB}} \right) \cdot \mathbf{k}; \end{aligned} \quad (8)$$

másfelől:

$$\mathbf{r}_P = X_P \cdot \mathbf{i} + Y_P \cdot \mathbf{j} + Z_P \cdot \mathbf{k}, \quad (9)$$

így (8) és (9) összehasonlításából:

$$X_P = X_A + t_P \cdot \frac{X_B - X_A}{l_{AB}}, \quad (10/1)$$

$$Y_P = Y_A + t_P \cdot \frac{Y_B - Y_A}{l_{AB}}, \quad (10/2)$$

$$Z_P = Z_A + t_P \cdot \frac{Z_B - Z_A}{l_{AB}}. \quad (10/3)$$

Eredményeink felhasználásához szükségünk van még a dőféspontokat jellemző feltételi egyenletekre, melyek az 1. ábráról leolvashatóan az alábbiak:

$$Z_{D_1} = 0, \quad (11/1)$$

$$X_{D_2} = 0, \quad (11/2)$$

$$Y_{D_3} = 0. \quad (11/3)$$

A (11) egyenletek alkalmazása úgy történik, hogy az adott feltételi egyenletből meghatározzuk a  $t_P$  paramétert, majd behelyettesítjük a másik két koordináta egyenletébe.

### $D_1$ koordinátáinak számítása

Ha  $P = D_1$ , akkor ( 10 / 3 ) és ( 11 / 1 ) alapján:

$$0 = Z_A + t_{D_1} \cdot \frac{Z_B - Z_A}{l_{AB}}, \text{ innen } t_{D_1} = -\frac{Z_A}{Z_B - Z_A} \cdot l_{AB}; \quad (12)$$

most ( 10 / 1 ) és ( 12 ) - vel:

$$\begin{aligned} X_{D_1} &= X_A + t_{D_1} \cdot \frac{X_B - X_A}{l_{AB}} = X_A - \frac{Z_A}{Z_B - Z_A} \cdot l_{AB} \cdot \frac{X_B - X_A}{l_{AB}} = X_A - Z_A \cdot \frac{X_B - X_A}{Z_B - Z_A} = \\ &= \frac{X_A \cdot (Z_B - Z_A) - Z_A \cdot (X_B - X_A)}{Z_B - Z_A} = \frac{X_A \cdot Z_B - X_A \cdot Z_A - X_B \cdot Z_A + X_A \cdot Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{X_A \cdot Z_B - X_B \cdot Z_A}{Z_B - Z_A}, \text{ tehát:} \\ X_{D_1} &= \frac{X_A \cdot Z_B - X_B \cdot Z_A}{Z_B - Z_A}. \end{aligned} \quad (13)$$

Majd ( 10 / 2 ) és ( 12 ) szerint:

$$\begin{aligned} Y_{D_1} &= Y_A + t_{D_1} \cdot \frac{Y_B - Y_A}{l_{AB}} = Y_A - \frac{Z_A}{Z_B - Z_A} \cdot l_{AB} \cdot \frac{Y_B - Y_A}{l_{AB}} = Y_A - Z_A \cdot \frac{Y_B - Y_A}{Z_B - Z_A} = \\ &= \frac{Y_A \cdot (Z_B - Z_A) - Z_A \cdot (Y_B - Y_A)}{Z_B - Z_A} = \frac{Y_A \cdot Z_B - Y_A \cdot Z_A - Y_B \cdot Z_A + Y_A \cdot Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{Y_A \cdot Z_B - Y_B \cdot Z_A}{Z_B - Z_A}, \text{ tehát:} \\ Y_{D_1} &= \frac{Y_A \cdot Z_B - Y_B \cdot Z_A}{Z_B - Z_A}. \end{aligned} \quad (14)$$

Összefoglalva  $D_1$  - re vonatkozó eredményeinket:

$$\begin{aligned} X_{D_1} &= \frac{X_A \cdot Z_B - X_B \cdot Z_A}{Z_B - Z_A}, \\ Y_{D_1} &= \frac{Y_A \cdot Z_B - Y_B \cdot Z_A}{Z_B - Z_A}, \\ Z_{D_1} &= 0. \end{aligned} \quad (D1)$$

Teljesen hasonlóan eljárva kapjuk a további eredményeket

$D_2$  - re:

$$\begin{aligned} X_{D_2} &= 0, \\ Y_{D_2} &= \frac{Y_A \cdot X_B - Y_B \cdot X_A}{X_B - X_A}, \\ Z_{D_2} &= \frac{Z_A \cdot X_B - Z_B \cdot X_A}{X_B - X_A}; \end{aligned} \quad (D2)$$

$D_3$  - ra:

$$\begin{aligned} X_{D_3} &= \frac{X_A \cdot Y_B - X_B \cdot Y_A}{Y_B - Y_A}, \\ Y_{D_3} &= 0, \\ Z_{D_3} &= \frac{Z_A \cdot Y_B - Z_B \cdot Y_A}{Y_B - Y_A}. \end{aligned} \quad (D3)$$

Ezzel kitűzött feladatunkat megoldottuk.

### Megjegyzések:

M1. Az 1. ábrán feltüntettük a térbeli  $\mathbf{e}$  egyenes  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  és  $\mathbf{e}_3$  koordinátasíkokra / képsíkokra vett vetületeit is. Segíthetnek a térbeli helyzet elképzelésében.

M2. Figyeljük meg az eredmény - képletek szabályszerűségeit, egyfajta szimmetriáját!

M3. Az eredmény - képletek nevezőjében két egyforma koordináta különbsége szerepel. Ha ez zérus – pl.:  $Z_B - Z_A = 0$  –, az azt jelenti, hogy az  $\mathbf{e}$  egyenes párhuzamos a mondott koordináták tengelyére merőleges – itt pl. az  $(XY)$  - síkkal, így nem dőfi azt a végesben.

M4. Az előbb megoldott feladat kiírása így is megfogalmazható:

adott:  $(X_A, Y_A, Z_A), (X_B, Y_B, Z_B)$  ;

keresett:  $(X_{D_1}, Y_{D_1}, Z_{D_1}) ; (X_{D_2}, Y_{D_2}, Z_{D_2}) ; (X_{D_3}, Y_{D_3}, Z_{D_3})$ .

M5. Ezt a feladatot más úton is megoldhattuk volna, pl. trigonometriai úton. Nem ezt választottuk, mert gyakorol(tat)ni kívántuk az elemi vektorgeometria alkalmazását.

Ennek talán az lehetett a kiváltója, hogy a minap egy ismerősöm megkérdezte, hogy emlékszem - e még a térbeli egyenes egyenletére. A válasz az, hogy emlékszem, de ez egy vektori, illetve három skaláris egyenletet jelent, ahogyan az fentebb be is lett mutatva.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**  
mérnök tanár

Sződliget, 2014. 10. 28.